

# LEÇON N° 153 : VALEURS PROPRES, VECTEURS PROPRES. CALCULS EXACTS OU APPROCHÉS D'ÉLÉMENTS PROPRES. APPLICATIONS.

Soit  $\mathbb{K}$  un corps,  $A \in M_n(\mathbb{K})$  et  $n \geq 1$ .

## I/ Éléments propres d'une matrice.

### A/ Définitions et calculs exacts. [G] [FGNAIlg2]

**Définition 1** : Valeur propre, vecteur propre et spectre.

**Définition 2** : Sous-espaces propres.

**Théorème 3** : Somme directe des sous-espaces propres.

**Définition 4** : Polynôme caractéristique.

**Proposition 5** : Valeur propre si et seulement si racine du polynôme caractéristique.

**Exemple 6** : Cas  $n = 2$  et expression du polynôme caractéristique et donc les valeurs propres.

**Proposition 7** : Algorithme de Fadéev-Le-Verrier : algorithme en  $O(n^4)$  opérations permettant d'obtenir les coefficients du polynôme caractéristique.

**Remarque 8** : Calculer les valeurs propres demande de trouver les racines d'un polynôme, ce qui est difficile en pratique.

### B/ Cas particuliers de calcul d'éléments propres. [G]

#### Développement 1

**Proposition 9** : Déterminant circulant.

**Application 10** : Suite de polygones.

**Proposition 11** : Matrices compagnons.

**Proposition 12** : Matrices nilpotentes.

**Proposition 13** : Les valeurs propres des matrices symétriques réelles sont réelles.

**Proposition 14** : Cas des matrices stochastiques.

### C/ Application à la réduction. [G] [ROM]

**Théorème 15** : Théorème spectral.

**Proposition 16** :  $A$  est diagonalisable si et seulement si les sous-espaces propres sont en somme directe et engendrent l'espace.

**Application 17** : Calcul d'une puissance de matrice.

**Application 18** : Étudier la convergence des suites  $U_{n+1} = AU_n$  car  $U_n = A^n U_0$  et si  $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge alors  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge aussi.

**Application 19** : Calcul de l'exponentielle de matrice.

## II/ Recherche approchée d'éléments propres.

### A/ Normes matricielles et conditionnement. [ALL]

**Définition 20** : Norme matricielle.

**Définition 21** : Rayon spectral.

**Proposition 22** :  $\rho(A) \leq \|A\|$  et réciproque partielle.

**Proposition 23** :  $A^n \rightarrow 0 \Leftrightarrow \rho(A) < 1$ .

**Définition 24** : Conditionnement.

**Remarque 25** : Permet d'avoir une mesure de l'erreur lors de méthode itérative.

**Proposition 26** : Inégalité avec conditionnement.

B/ Localisation de valeurs propres. [FGNAlg2]

Développement 2

**Théorème 27** : Disques de Gershgorin.

**Application 28** : Son application avec le déterminant d'une matrice.

**Proposition 29** : Si un disque est isolé, alors il y a une unique valeur propre dans ce disque.

**Remarque 30** : En utilisant les disques de Gershgorin sur une matrice compagnon on peut donc localiser les racines d'un polynôme.

C/ Méthodes itératives. [ALL] [CIA]

**Proposition 31** : Méthode de la puissance.

**Proposition 32** : Méthode de la puissance inverse.

**Proposition 33** : Méthode QR.

**Références** :

- [G] Gourdon Algèbre p. 146, p. 161, p. 221
- [FGNAlg2] Francinou, Gianella Nicolas Algèbre 2 p. 79-80
- [ROM] Rombaldi Algèbre et géométrie 2nd éd. p. 682
- [ALL] Allaire Analyse numérique p. 410-415, p. 440
- [CIA] Ciarlet Introduction à l'analyse numérique matricielle p. 123